Лекция 14

Тема. Теории нечетких множеств.

Некоторые информационные системы имеют такие особенности, которые практически делают невозможным применение традиционных математических методов. Сложность процесса принятия решения, отсутствие математического аппарата приводят к тому, что при оценке и выборе альтернатив возможно использовать и обрабатывать качественную экспертную информацию. Перспективным направлением является лингвистический подход на базе теории нечетких множеств.

Математическая статистика и теория вероятностей используют экспериментальные данные, обладающие строго определенной точностью и достоверностью. Теория нечетких множеств имеет дело с человеческими знаниями, которые принято называть экспертной информацией.

Основные понятия теории нечетких множеств.

Опр. Пусть $X=\{x\}$ – универсальное множество, т.е. полное множество, охватывающее всю проблемную область. **Нечеткое множество** A есть набор пар $\{(x, \mu^A(x)) \mid x \in X, \mu^A : X \to [0,1]\}$, где $\mu^A(x)$ – **функция принадлежности** которая является субъективной мерой соответствия элемента нечеткому множеству. Принимает значение от нуля (абсолютная непринадлежность) до единицы (абсолютная принадлежность) элемента x к A.

Если множество A определено на конечном универсальном множестве $X = \{x_1, x_2, ..., x_n\}$, то его удобно обозначать $A = \mu^A(x_1) \mid x_1 + ... + \mu^A(x_n) \mid x_n = \sum_{i=1}^{n} \mu^A(x_i) \mid x_i$

где пара $\mu^A(x_i) \mid x_i$ – называется **синглтоном.**

Пример.

Пусть $X=\{1,2,\ldots.10\}$. Тогда нечеткое множество «большие числа» может быть представлено как A=«большие числа»= 0.2|6+0.5|7+0.8|8+1|9+1|10. Это следует понимать: 9 и 10 с абсолютной уверенностью относятся к «большим числам», 8 есть большее со степенью 0.8 и т.д. 1,2,…,5 абсолютно не являются большими.

В случае непрерывного множества X использую следующее обозначение нечеткого множества $A = \int_X \mu^A(x) \mid x$

Свойства нечетких множеств

1. Нечеткое множество $A \subseteq X$ **пустое**, если $\mu^A(x) = 0 \quad \forall x \in X$.
2. Нечеткие множества A и $B \subseteq X$ **эквивалентны**, если $\mu^A(x) = \mu^B(x) \quad \forall x \in X$.
3. Нечеткое множество $A \subseteq X$ является **подмножеством** нечеткого множества $B \subseteq X$, если $\mu^A(x) \le \mu^B(x) \quad \forall x \in X$.

Пример. Пусть $X=\{1,2,3\}$ **A**=0.3|1+0.2|2+1|3, B=0.4|1+0.6|2+1|3
Следовательно $A \subseteq B$.

Опр. **Кардинальное число (мощность**) нечеткого множества находится следующим образом $cardA = |A| = \sum_{i=1}^{n} \mu^A(x_i)$.

Пример. Пусть $X=\{1,2,3,4\}$. Если A=0.1|1+0.4|2+0.7|3+1|4, то $cardA$=2.2.

Операции над нечеткими множествами

1. Дополнением нечеткого множества A называют нечеткое множество $\neg A$, функция принадлежности которого равна $\mu^{\neg A}(x) = 1 - \mu^{A}(x), \forall x \in X$.
2. Пересечением двух нечетких множеств A и $B \subseteq X$ называют нечеткое множество $A \cap B$, функция принадлежности которого равна $\mu^{A\cap B}(x) = \mu^{A}(x) \wedge \mu^{B}(x), \forall x \in X$, где $\wedge$ – знак операции минимума.
3. Объединением двух нечетких множеств A и $B \subseteq X$ называют нечеткое множество $A \cup B$, функция принадлежности которого равна $\mu^{A\cup B}(x) = \mu^{A}(x) \vee \mu^{B}(x), \forall x \in X$, где $\vee$ – знак операции максимума.

Пример. Пусть X={1,2,…,10}. A= «малые числа»=1|1+1|2+0.8|3+0.5|4+0.3|5+0.1|6; B=«большие числа»=0.1|5+0.2|6+0.5|7+0.8|8+1|9+1|10; Тогда $\neg A$ = «не малые числа»=0.2|3+0.5|4+0.7|5+0.9|6+1|7+1|8+1|9+1|10; $A \cap B$ =«малые числа И большие числа»=0.1|5+0.1|6; $A \cup B$= «малые числа ИЛИ большие числа»=1|1+1|2+0.8|3+0.5|4+0.3|5+0.2|6+0.5|7+0.8|8+1|9+1|10.

Нечеткие числа и операции над ними

Опр. **Нечеткое число** $\tilde{A}$ – это нечеткий набор, характеризуемый функцией принадлежности $\mu_{\tilde{A}} : R \to [0,1]$ т.е. $\tilde{A} = \int \mu_{\tilde{A}}(x) \,|\, x$, где $\int$ – объединение по всем $x \in R$; $\mu_{\tilde{A}}(x) \,|\, x$ – степень принадлежности x множеству $\tilde{A}$ равна $\mu_{\tilde{A}}(x)$.

Опр. Нечеткое число $\tilde{A}$ выпукло, если $x, y, z \in R$ $x \le y \le z$ $\mu_{\tilde{A}}(y) \ge \min(\mu_{\tilde{A}}(x), \mu_{\tilde{A}}(z))$.

Опр. Нечеткое число $\tilde{A}$ нормальное, если $\max\limits_{x} \mu_{\tilde{A}}(x) = 1$

Принцип обобщения. Пусть $\tilde{A}$ и $\tilde{B}$ –нечеткие числа на R. Тогда * можно выполнить над $\tilde{A}$ и $\tilde{B}$, используя соотношение $\tilde{A} * \tilde{B} = \int \min(\mu_{\tilde{A}}(x)\mu_{\tilde{B}}(x)) \,|\, (x * y)$. Заменив * на +,-,x,: получим действия над нечеткими числами. Эти операции громоздки.

П**рименение нечетких множеств в задачах принятия решения в условиях определенности**

Пусть имеется множество альтернатив $A = \{a_1, a_2, ..., a_m\}$.Тогда определим критерий как нечеткое множество $C = \{\mu_C(a_1) \,|\, a_1, ..., \mu_C(a_m) \,|\, a_m\}$, $\mu_C(a_i) \in [0,1]$. Пусть имеется n критериев $C_1, ..., C_n$. Тогда лучшая альтернатива будет та, которая удовлетворяет и C_1 и C_2 и т.д. и C_n . т.е. это $D = C_1 \cap C_2 \cap ... \cap C_n$, что соответствует $\mu_D(a_j) = \min\limits_{i=\overline{1,n}} \mu_{C_i}(a_j),\ j = \overline{1,m}$.

В качестве лучшей альтернативы выбирается та у которой наибольшая функция принадлежности $\mu_D(a^*) = \max\limits_{j=\overline{1,m}} \mu_D(a_j)$.

Если C_i имеют различную важность, каждому из них приписывается число $\alpha_i \ge 0$ (чем важнее критерий, тем больше α_i), следовательно $D = C_1^{\alpha_1} \cap C_2^{\alpha_2} \cap ... \cap C_n^{\alpha_n}$, $\alpha_i \ge 0, i = \overline{1,n}$, $\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} \alpha_i = 1$.

Коэффициенты определяются методами парных сравнений

Шкала

Относительная важность C_i и C_j	b_{ij}
Равная важность	1

Немного важнее	3
Важнее	5
Заметно важнее	7
Намного важнее	9
Промежуточные значения	2,4,6,8

строится матрица B, где $b_{ii} = 1, b_{ij} = 1/b_{ij}$. Находим собственный вектор B: $Bw = \lambda \max w$.
Тогда искомые $\alpha_i = nw_i$.

Пример. Обозначим a_1 –главный инженер; a_2 -директор малого предприятия; a_3 -сотрудник НИИ; a_4 -зам.директора; a_5 - инженер. Критерии C_1 – профессиональные навыки, C_2 - организационные способности, C_3 - опыт работы, C_4 - авторитет, C_5 - умение работать с людьми, C_6 - возраст. Получим множества:

$$C_1 = \{0.9 \mid a_1; 0.9 \mid a_2; 0.6 \mid a_3; 0.8 \mid a_4; 0.5 \mid a_5\}$$
$$C_2 = \{0.8 \mid a_1; 0.2 \mid a_2; 0.5 \mid a_3; 0.7 \mid a_4; 0.6 \mid a_5\}$$
$$C_3 = \{0.7 \mid a_1; 0.9 \mid a_2; 0.8 \mid a_3; 0.5 \mid a_4; 0.3 \mid a_5\}$$
$$C_4 = \{0.9 \mid a_1; 0.8 \mid a_2; 0.5 \mid a_3; 0.6 \mid a_4; 0.5 \mid a_5\}$$
$$C_5 = \{0.9 \mid a_1; 0.9 \mid a_2; 0.4 \mid a_3; 0.7 \mid a_4; 0.6 \mid a_5\}$$
$$C_6 = \{0.9 \mid a_1; 0.4 \mid a_2; 0.8 \mid a_3; 0.7 \mid a_4; 0.5 \mid a_5\}$$

Тогда правило выбора имеет вид

$$D = \left\{ \begin{array}{l} \min(0.9;0.8;0.7;0.9;0.9;0.9) \mid a_1; \min(0.9;0.9;0.9;0.8;0.9;0.4) \mid a_2; \\ \min(0.6;0.5;0.8;0.5;0.4;0.8) \mid a_3; \min(0.8;0.7;0.5;0.6;0.7;0.7) \mid a_4; \\ \min(0.5;0.6;0.3;0.5;0.6;0.4) \mid a_5 \end{array} \right\} = \{0.7 \mid a_1; 0.4 \mid a_2; 0.4 \mid a_3; 0.5 \mid a_4; 0.3 \mid a_5\}$$

Следовательно лучший вариант является a_1 –главный инженер.

Пример. Критерий различной важности. Выбор места строительства. Критерии C_1 - близость к потребителю; C_2 - близость к источникам сырья; C_3 - наличие свободной рабочей силы. Пусть a_1, a_2, a_3, a_4 – предполагаемые места строек.

$$C_1 = \{0.5 \mid a_1; 0.7 \mid a_2; 0.3 \mid a_3; 0.6 \mid a_4\}$$
$$C_2 = \{0.5 \mid a_1; 0.4 \mid a_2; 0.8 \mid a_3; 0.4 \mid a_4\}$$
$$C_3 = \{0.2 \mid a_1; 0.1 \mid a_2; 0.6 \mid a_3; 0.9 \mid a_4\}$$

$$B = \begin{array}{cccc} & C_1 & C_2 & C_3 \\ C_1 & 1 & 5 & 1/3 \\ C_2 & 1/5 & 1 & 1/9 \\ C_3 & 3 & 9 & 1 \end{array}$$

Собственный вектор $w_1 = 0.06, w_2 = 0.27, w_3 = 0.67 \Rightarrow \begin{array}{l} \alpha_1 = 3 \cdot 0.06 = 0.18 \\ \alpha_2 = 3 \cdot 0.27 = 0.81 \\ \alpha_3 = 3 \cdot 0.67 = 2.01 \end{array}$

Модифицируем C_i:

$$C_1^{0.18} = \{0.5^{0.18} \mid a_1; 0.7^{0.18} \mid a_2; 0.3^{0.18} \mid a_3; 0.6^{0.18} \mid a_4\} = \{0.88 \mid a_1; 0.94 \mid a_2; 0.81 \mid a_3; 0.91 \mid a_4\}$$
$$C_2^{0.81} = \{0.57 \mid a_1; 0.48 \mid a_2; 0.83 \mid a_3; 0.48 \mid a_4\}$$
$$C_3^{2.01} = \{0.04 \mid a_1; 0.01 \mid a_2; 0.36 \mid a_3; 0.81 \mid a_4\}$$
$$\Rightarrow$$
$$D = \{0.04 \mid a_1; 0.01 \mid a_2; 0.36 \mid a_3; 0.48 \mid a_4\}$$

a_4 -выбор.

Нечеткие отношения

Пусть $X = \{x_1,..., x_n\}, Y = \{y_1,..., y_m\}$.

Опр. Нечетким отношением R называется нечеткое множество определенное на $X \times Y$, которому соответствует функция принадлежности $\mu^R : X \times Y \to [0.1]$ т.е. μ^R отражает силу зависимости.

Пример. Пусть X={конь, осел}; У= {мул, корова}.

R = «подобный»=0.8|(конь,мул)+0.4|(конь,корова)+0.9|(осел,мул)+0.5|(осел,корова).

Опр. Если $R \subseteq X \times Y$, $S \subseteq Y \times Z$, то max-min композицией называется нечеткое множество $R \circ S$, определенное на $X \times Z$, функция принадлежности которого имеет вид: $\mu^{R \circ S}(x, z) = \sup\limits_{y \in Y} \left[\mu^R(x, y) \wedge \mu^S(y, z)\right]$.

Max-min композиция отвечает на вопрос какое Y следует поставить в соответствие $A' \subseteq X$, если $B \subseteq Y$ и соответственно $A \subseteq X$. Эта операция называется нечетким логическим выводом.

$B' = A' \circ R = A' \circ (A \times B)$

$$R = A \times B = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{m} \left\{\mu^A(x_i) \wedge \mu^B(y_j) \mid (x_i, y_j)\right\}$$

$\circ$ - max-min композиция $\Rightarrow$ $B' = \sum\limits_{j=1, i=\overline{1,n}}^{m} \left\{\mu^A(x_i) \wedge \mu^R(x_i y_j) \mid y_j\right\}$ $A.A' \subseteq X, BB' \subseteq Y$